Kā grami pārvēršas sekundēs un metros

Ansis Mežulis*

ansis@sal.lv

* 1996. g. LZA Augstskolu studentu prēmijas laureāts

* 2000. g. LZA un "Grindex" balvas un prēmijas laureāts kā labākais Latvijas jaunais zinātnieks fizikā

Šis raksts ir veltīts jautājumam, kas interesē ļoti daudzus sportiskus MTB braucējus – cik daudz var ievinnēt sacensību trasē, braucot ar vieglāku divriteni? Raksta sākuma daļā tiek parādīts, ka šāds uzdevums matemātiski ir ļoti sarežģīti risināms. Tālāk tiek sniegts raksta autora izveidotais matemātiskais modelis, ar kura palīdzību tuvināti ir iespējams šādu uzdevumu atrisināt. Pēc pieņemtiem divu riteņbraucēju parametriem šī matemātiskā modeļa skaitliskie rezultāti ir parādīti grafikos. Raksta beigu daļā, izmantojot pulsometra datus, tiek aprēķināts, cik sekundes Riekstukalna XC trases aplī tiek ievinnēts, lietojot par 3 kg vieglāku divriteni. Bez tam tiek novērtēts ieguvums, samazinot vieglākā divriteņa svaru par 50 g.

Lai raksts būtu saprotams pilnībā, tas prasa no lasītāja augsta līmeņa zināšanas fizikā un matemātikā. Neskatoties uz to, autors iesaka izlasīt šo rakstu visiem interesentiem, jo ir iespējams sekot līdzi tekstam un pilnībā iepazīties ar rakstā dotajiem rezultātiem, neiedziļinoties matemātikas formulās un paņēmienos, kā tās ir iegūtas.

Ievads

Latvija nevar lepoties ar īpaši kalnainu reljefu, tomēr riteņbraukšanas sacensības kalnu divriteņu sportā (MTB) jau pašlaik ir ļoti iecienītas un turpina attīstīties. Lai arī tehniski sarežģītu MTB trašu Latvijā nav daudz, un dalībnieku skaits tādās sacensībās nav mērāms daudzos simtos, patiesie šī sporta veida cienītāji MTB sacensībām pieiet ar lielu nopietnību. Braucēji ar dažādu fizisko sagatavotību velta daudz laika treniņiem un neskopojas ar naudu labākam ekipējumam, lai trasē mērotos spēkiem ar saviem labi zināmajiem sāncenšiem... protams, ar domu tos pārspēt!

Tāpēc gribot negribot nākas domāt par visātrāko divriteni Latvijas MTB trasēs. Velodaļu izvēle pēc ražotāja, ērtuma un izskata ir katra paša ziņā, taču visas detaļas vieno viens kopīgs parametrs – svars. Dominējošais uzskats par divriteņa svaru, ko ir nostiprinājusi prakse un pamata fizikas likumu zināšanas, ir skaidrs un tiešs: jo vieglāks, jo labāk!

Tomēr, sākot no šīs vietas, visātrākā MTB divriteņa filozofija sāk buksēt. Ir braucēji, kas apjauš, ka smagāks divritenis pārvarēs kaut kādu šķērsli ar mazāku ātruma zudumu, jo tam ir lielāka uzkrātā kinētiskā enerģija. No otras puses, šis faktors šķiet nenozīmīgs salīdzinājumā ar daudziem straujiem paātrinājumiem un braukšanu kāpumos. Kopumā šis jautājums noved pie nepieciešamības pēc matemātiska novērtējuma, cik lielu lomu kādās braukšanas epizodēs spēlē divriteņa svars.

Visvairāk interesējošais jautājums

Gandrīz katrs, kurš domā par saviem startiem MTB sacensībās, domā par sava kaujas zirga svaru. Zināms, jo vairāk naudiņas izdosi, jo to var dabūt vieglāku. Par cik naudu mēdz skaitīt, tiek skaitīti arī grami. Tas viss tiek darīts tikai viena jautājuma dēļ, uz kuru katrs kaislīgs MTB braucējs gribētu zināt atbildi: cik daudz es ievinnētu sacensību trasē, ja *nomestu* no sava divriteņa *tik un tik* gramus?

Šis jautājums ir iemantojis neatbildamā statusu. Solis virzienā uz atbildi ir attiecīgi interneta resursi, kuros var apskatīt vai pat ar saviem ievadītiem parametriem uzkonstruēt dažādus grafikus. Tas viss dod fragmentāru priekšstatu par riteņbraucēja dinamiku, bet atbilde uz šo jautājumu kopumā tomēr paliek nesasniegta. Kāpēc tas tā ir?

„Ķeršanās pie lietas" un nokļūšana matemātiskās grūtībās

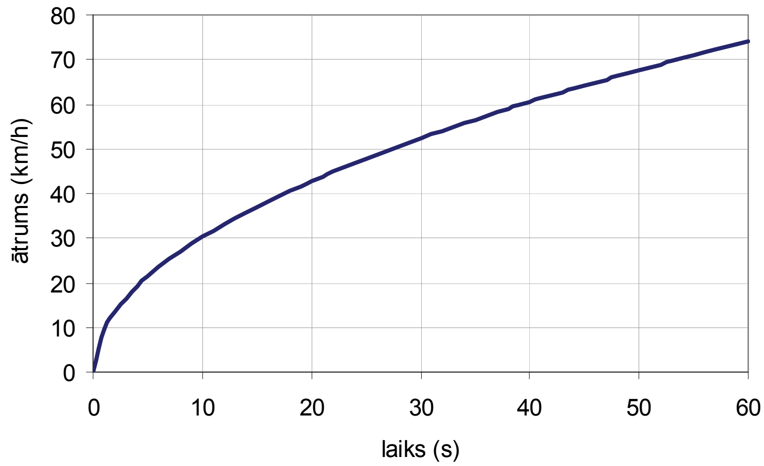
Šajā raksta daļā tiek parādīts, kā augstāk uzstādītā jautājuma risināšana (pat vienkāršotā veidā) ātri noved pie ļoti sarežģītas matemātikas.

Aplūkojam vienkāršāko gadījumu – paātrinājumu no nulles, kas tiek veikts, ieguldot pedāļu mīšanā konstantu jaudu (tālāk tā tiek saukta par vilcējjaudu). Pretestības spēkus, kā arī ieguldīto papildus enerģiju riteņu rotācijā šeit neņemam vērā (supervieglie rati!). Izejošais vienādojums, kas apraksta visas vilcējjaudas ieguldīšanu kinētiskajā enerģijā, ir ļoti vienkāršs:

$$Pt = \frac{Mv^2}{2}, \tag{1}$$

kur P ir vilcējjauda, t laiks no paātrinājuma uzsākšanas, M pilnā masa. Izrisinot no šī vienādojuma ātruma pieaugumu laikā, iegūst šādu izteiksmi un līkni:

$$v(t) = \sqrt{\frac{2Pt}{M}}\ . \tag{2}$$



Graf. 1. Idealizēts ātruma pieaugums. Pieņemtā vilcējjauda jauda 300 W, pilnā masa 85 kg.

Iegūtais grafiks tālākam uzdevuma risinājumam neko labu nesola. Tā ir kvadrātsaknes līkne nevis taisne, tātad veiktā ceļa aprēķināšanai nevar izmantot no skolas laikiem zināmo „universālo formulu”, kas ir derīga tikai konstantam paātrinājumam a: $s = s_0 + v_0 t + at^2/2$. Ceļa aprēķināšanai acīmredzot nāksies integrēt funkciju $v(t)$. Nākamo problēmu rada tas, ka $v(t)$ saskaņā ar vien. (2) acīmredzami ir pārāk tālu no realitātes – proti, graf. (1) uzrāda ātruma pieaugumu līdz neticami lielām vērtībām! Bez tam, atbilstoši kvadrātsaknes līknei, ātruma pieaugums asimptotiski netuvojas nekādai galīgai vērtībai. Šāda neatbilstība realitātei rodas, jo netiek ņemti vērā pretestības spēki.

Ir labi zināms, ka uz riteņbraucēju darbojas divi galvenie pretestības spēki: rites berze un gaisa pretestība.

Ja ceļa segums ir labs, gaisa pretestība kļūst par galveno pretestības spēku jau sākot no visai piezemētiem ātrumiem. Tā viennozīmīgi ir atkarīga no braukšanas ātruma, bet ne no vienas noteiktas ātruma pakāpes (iegūt gaisa pretestības spēka formulu pa ātruma pakāpēm noteiktam lidojošam ķermenim ir viens no pamata aerodinamikas uzdevumiem). Tāpēc šeit es uzrakstu vispārīgi gaisa pretestības atkarību no ātruma $F_g = F_g(v)$ un parādu, kā to pievienot vien. (1):

$$Pt = \frac{Mv^2(t)}{2} + \int_0^t F_g\big(v(t)\big)v(t)dt\,. \tag{3}$$

Ja gaisa pretestību apraksta matemātiskajai analīzei vispateicīgākajā formā – kā otrās kārtas polinomu: $F_g = k_2 v^2 + k_1 v$, tad no vien. (3) iegūst šādu integrālvienādojumu:

$$v^2(t) + \frac{2}{M}\int_0^t \big(k_2 v + k_1\big)v^2(t)dt = \frac{2P}{M}t\,. \tag{4}$$

Tas ir otrā veida nehomogēns lineārs integrālvienādojums. Ar augstākās matemātikas metodēm ar to ir iespējams tikt galā, bet tā atrisinājums sanāk tikai īpašvērtību summas veidā. Tāda veida atrisinājums īsā un matemātikas nespeciālistiem saprotamā veidā vispār nav pierakstāms; tāpēc šādi formulēts uzdevums populārajā literatūrā izrisinātā veidā nav sastopams.

Atšķirībā no matemātikas klasicisma, augstākajā fizikā šādi uzdevumi tiek risināti ar speciālām metodēm (tuvinātās, netiešās u.tml.). Lielākā fizikālo metožu priekšrocība ir uzdevuma risinājuma pasniegšana *taustāmā* formā un iespēja uzzīmēt pēc patikas daudz un dažādus grafikus, kas ļoti palīdz pareizi izjust uzdevumā apskatīto procesu.

Aplūkojamais uzdevums un tā risināšanas ideja

Mēdz teikt, ka sarežģītos gadījumos skaidri noformulēts uzdevums ir jau puse no atrisinājuma. Šeit tas tiek izdarīts:

<u>Aprēķināt, cik sekundes braucējs ar vieglāku divriteni ievinnē tādam pašam braucējam ar smagāku divriteni Riekstukalna XC trases aplī:</u>

a) uzdevuma risināšanai izmantot pulsometra datus (ar altimetru), kas sacensību režīmā iegūti no Riekstukalna XC trases apļa,
b) lai uzdevuma atbildi iegūtu skaitlisku, izvēlēties visus uzdevumam nepieciešamos skaitliskos lielumus.

Uzdevuma risināšanas ideja ir ar pulsometru datētiem trases fragmentiem izmantot vien. (1), papildinātu ar riteņu rotācijas enerģiju, lai tajā operētu ar atšķirīgām masām M_1 un M_2, tādējādi iegūstot atšķirīgus ātrumus. Pēc tam atšķirīgos momentānos ātrumus var pārvērst fragmentārā veiktā ceļa vai laika starpībā. Sasummējot kopā fragmentus pa pilnu trases apli, tiek iegūta starpība apļa veikšanā starp braucējiem M_1 un M_2 – kas arī ir dotā uzdevuma atrisinājums!

Divu braucēju salīdzināšana samazina prasības pret aprēķinātā ātruma, laika un ceļa absolūtajiem lielumiem. Tāpēc šķiet vilinoši pieņemt, ka graf. (1) iztur kritiku, un izmanot to. Tomēr vienkārša skaitliskā analīze rāda, ka pretestības spēku ignorēšanas dēļ aprēķinu kļūda pieņem pārāk lielus apmērus. Nākas iekļaut pretestības spēkus risinājumā, kas neglābjami sarežģī visu uzdevumu...

Pretestības spēku iekļaušana uzdevuma risinājumā

1. Rites berzi pirmajā (un pietiekami labā) tuvinājumā vienmēr apraksta kā proporcionālu tikai braucēja masai: μM, kur μ ir berzes koeficients, ko nosaka riepa, tās spiediens un trases segums. Aplūkojamā uzdevumā rites berzi ir iespējams ņemt vērā ar pavisam vienkārša matemātiska trika palīdzību. Lai to saprastu, jāatceras, ka augstāk izklāstītā uzdevuma risināšanas ideja tiešā veidā neietver rites berzē disipēto jaudu – jo, izmantojot no pulsometra pieraksta laiku, veikto distanci, augstumu un momentāno ātrumu, ar vien. (1) tiek atrasta tikai vilcējspēkā ieguldītā jauda P. No otras puses, par cik pēc uzdevuma nosacījumiem abi braucēji ir vienādi, katrā trases vietā tie attīsta vienādu pilno jaudu – kas sevī ietver arī rites berzē disipēto jaudu. Tabulās var atrast, ka labi ripojošām MTB riepām Riekstukalna trases segumam abu riteņu rites berze ir ap 100 W (precīzāk nevajag!). Aizsteidzoties priekšā abu braucēju pilnajam aprakstam, sākot no šīs vietas ir jālieto abu braucēju pieņemtās pilnās masas: 80 kg un 83 kg. Pielāgojot šos 100 W otram, teiksim, smagākajam braucējam, iegūst $100\,\mathrm{W} \cdot 83 / 80 \approx 104\,\mathrm{W}$. Tātad smagākais braucējs rites berzes pārvarēšanai tērēs par 4 W vairāk. Atliek šos 4 W atņemot no izrēķinātās vilcējjaudas P, lai vien. (1) risinātu otrā virzienā, 80 kg vietā liekot 83 kg (un tādējādi iegūstot citu momentānā ātruma v vērtību). Nav jāuztraucas par novērtēto 4 W precizitāti, jo, ja vien braukšana nenotiek cauri bieziem dubļiem, šis lielums ir daudz mazāks par vilcējspēkā ieguldīto jaudu (sacensību režīmā > 100 W).

2. Gaisa pretestības ietveršana uzdevumā to sarežģī daudz vairāk. Vienādojums (1) operē ar *idealizēto* ātrumu v, kurā tā nav ņemta vērā. Savukārt realitātē mēs sastopamies ar *reālo ātrumu* v_R – tas ir ātrums, kādā, ņemot vērā visus pretestības spēkus, divritenis patiešām pārvietojas. Tieši reālo ātrumu nolasa no velodatora, un tas ir jāizmanto, aprēķinot veikto ceļu pēc laika. Tāpēc ir jāizveido matemātiska saite starp idealizēto ātrumu v un reālo ātrumu v_R, ar kuru tiks operēts abos virzienos: no velodatora nolasījuma pielietošanai vien. (1) $v_R \to v$; no v atrašanas ar vien. (1) veiktā ceļa starpības atrašanai $v \to v_R$.

Sakarības meklēšanai starp idealizēto un reālo ātrumu ir jāizmanto kāds fizikāls modelis gaisa pretestības aprēķināšanai. Velotēmas ietvaros gandrīz visas pieejamās informācijas ietvaros tiek aplūkots viens modelis, kas būtībā pretendē tikai uz „bērnudārza modeļa" statusu. Proti, tas apraksta tikai braucēja frontālo sadursmi ar gaisa molekulām, ignorējot ātruma samazinājumu dēļ gaisa plūsmā radītajiem sablīvējumiem un retinājumiem (šāds modelis cita starpā liek secināt, ka šosejā no diskriteņiem nav nekādas jēgas...). Tomēr MTB vajadzībām, vēl jo vairāk, divu braucēju ātrumu starpības meklēšanai, šis modelis ir pietiekami labs. Saskaņa ar to gaisa pretestības spēku atrod pēc formulas:

$$F_g = \frac{1}{2} k S_F \rho v^2 \,, \tag{5}$$

kur k ir gaisa viskozās berzes koeficients, S_F - braucēja frontālās virsmas laukums, ρ - gaisa blīvums un v - braucēja ātrums. Normālos apstākļos vidēja lieluma braucējam tiek rekomendēts izmantot sekojošas vērtības: $k \cdot S_F = 0{,}37$ m^2, $\rho = 1{,}22$ kg/m^3.

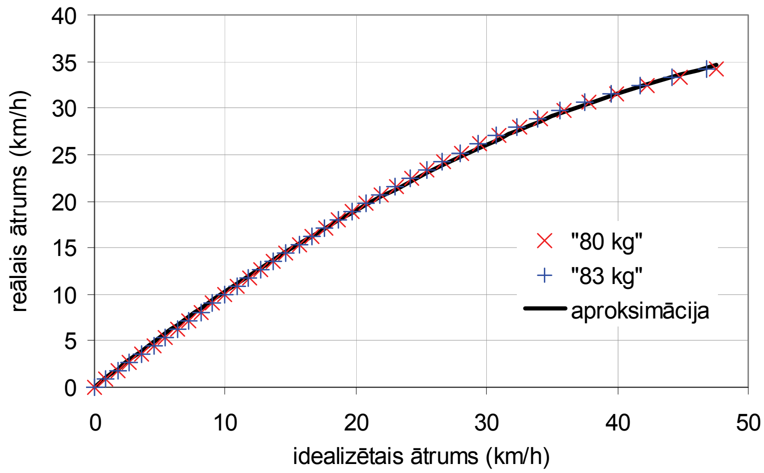
Sareizinot spēku F_g ar ātrumu v, iegūst jaudu P_g, kas nepieciešama gaisa pretestības pārvarēšanai, bet ar to sakarības $v_R = v_R(v)$ iegūšanai nepietiek. Lai iegūtu šo sakarību, jāzin, cik liela translācijas kustības uzturēšanas jaudas daļa tiek patērēta gaisa pretestības pārvarēšanai. Par nelaimi, šī jaudas daļa trasē nav konstanta. Tomēr, papētot izrēķinātās līknes $v_R = v_R(v)$ atkarību no šīs jaudas, izmaiņas līknē ir pietiekoši mazas, lai apmierinātos ar vienu izvēlētu konstantu P_0 vērtību. Atliek to izvēlēties. No vienas puses, pieklājīgs ātrums, sākot no kāda būtu jāņem vērā gaisa pretestība, gludā trases posmā var tikt attīstīts sākot ar $P = 200$ W. No otras puses, ja aplūko nobraucienu, kura stāvums ir 8%, un kas tiek veikts ar ātrumu 30 km/h (ekstremālāku šeit aplūkot nevajag, jo tad parasti tiek piestrādāts arī ar bremzēm), 80 kg smags braucējs potenciālās enerģijas izmaiņas dēļ brāžas lejā ar jaudu 520 W. Saprātīgi ir izvēlēties vidējo P vērtību, noapaļojot to krietni uz augšu (kad gaisa pretestība spēlē lielāku lomu), tāpēc tiek ņemts $P_0 = 400$ W.

Izmantojot vien. (5), matemātiskā sakarība starp idealizēto un reālo ātrumu iznāk šāda:

$$v = \frac{v_R}{\sqrt{1 - \dfrac{k S_F \rho v_R^3}{2P_0}}} \,. \tag{6}$$

Matemātiski korekti būtu vien. (6) izrisināt formā $v_R = v_R(v)$ un tālāk izmantot šo izteiksmi pārejai uz reālo ātrumu. Taču pietiek šim vienādojumam uzmest aci, lai redzētu, ka attiecībā pret v_R tas ir kubiskais vienādojums, un atcerēties, ka vēlāk šī vienādojuma sakne tiks izmantota nobrauktā ceļa integrēšanā, lai to noteikti nedarītu. Tā vietā $v_R = v_R(v)$ robežās no nulles līdz ≈ 35 km/h ir jāaproksimē ar tālākai integrēšanai vispateicīgāko funkciju. Tas ir otrās kārtas polinoms.

Sakarība starp idealizēto un reālo ātrumu pēc vien. (6) un tās aproksimācija ir parādīta grafikā 2.



Graf. 2. Sakarība starp idealizēto ātrumu v un reālo ātrumu v_R, kas tālāk tiek izmantota uzdevuma risināšanā.

Kā redzams no graf. 2, līknes atkarība no braucēja masas (80 vai 83 kg) ir tik maza, ka abus gadījumus pieļaujamās kļūdas robežās var aproksimēt ar vienādiem koeficientiem:

$$v_R = k_2 v^2 + k_1 v \quad : \quad k_2 = -0{,}008 \ h/km, \quad k_1 = 1{,}11 \, . \tag{7}$$

Šķietami līdzīgi kā pārejai no vien. (3) uz vien. (4), es esmu ticis pie otrās kārtas polinoma „$k_2v^2 + k_1v$". Tomēr atšķirība ir principiāla, jo tagad šis polinoms attiecas uz v_R nevis F_g. Tieši tas ļauj *apiet* integrālvienādojuma (4) risināšanu, kā tas tiek parādīts nākamajā raksta daļā.

Uzdevuma matemātiskais modelis

Tālāk es ķeros pie vien. (1) pārveidošanas, lietojot jaudu P (no kuras ir izslēgta rites berzē disipētā jauda) un ietverot riteņu rotācijas enerģiju. Trases fragmentam, kuram šis vienādojums tiks pielietots, tiek uzskatīts, ka laiku atskaita no nulles ($t_0 = 0$), bet sākuma translācijas un rotācijas ātrumi ir attiecīgi v_0 un ω_0.

a) horizontāls trases posms: $\Delta h = 0$

$$Pt = \frac{M\left(v^2 - v_0^2\right)}{2} + \frac{I\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}{2} \, . \tag{8}$$

Uzdevumā tālāk tiek pieņemts, ka nevienā braukšanas epizodē nenotiek vērā ņemama riteņu spolēšana. Tas ļauj rotācijas ātrumu ω turpmāk aizstāt ar translācijas ātrumu v: $\omega = 2\pi v/s$, kur s ir viena riteņa apgrieziena noietais ceļš (vidēja izmēra 26” baika riepai $s = 2{,}03$ m). To izmantojot, vien. (8) ir pārveidojams šādi:

$$v^2(t) = v_0^2 + 2\frac{Pt}{\alpha M}, \tag{9}$$

kur $\alpha = 1 + 4\pi^2 \frac{I}{Ms^2}$ ir izrēķināts parametrs, kas atšķirības labad no dotajiem lielumiem tiek apzīmēts ar grieķu burtu.

Vienādojums (9) reālajam ātrumam saskaņā ar vien. (7) sanāk šāds:

$$v_R(t) = k_2 v^2 + k_1 v = k_2\left(v_0^2 + 2\frac{Pt}{\alpha M}\right) + k_1\sqrt{v_0^2 + 2\frac{Pt}{\alpha M}}. \tag{10}$$

Vienādojums (10) ir reālā ātruma v_R izrisinājums jebkuram laika momentam t, ietverot gaisa pretestības spēku. Lai atrastu nobraukto ceļu S, šī ātruma izteiksme ir jāintegrē pēc laika:

$$S(t) = \int_0^t v_R(t)dt = k_2 v_0^2 t + k_2 \frac{P}{\alpha M}t^2 + k_1 \frac{\alpha M}{3P}\left[\left(v_0^2 + \frac{2P}{\alpha M}t\right)^{\frac{3}{2}} - v_0^3\right]. \tag{11}$$

b) slīps trases posms: $\Delta h \neq 0$

MTB trasēs tādi fragmenti, kurus var uzskatīt par horizontāliem, ir ļoti maz. Pārējie trases fragmenti ir raksturojami ar augstuma h maiņu. Tāpēc reālas trases aprēķinam ir nepieciešams vien. (8) papildināt ar augstuma izmaiņu. No aplūkojamā trases fragmenta vienādojumā tiek ņemts vērā tikai sākuma un beigu augstums (tāpēc kalns, kuram sākumā ir viens stāvums, tālāk cits, ir jāsadala vairākos atsevišķos fragmentos). Pa vidu tiek veikta aproksimācija – par kuru gribētos domāt, ka tā ir taisnes aproksimācija, bet matemātiskā īpatnība parādīs ko citu.

Lai vienkāršotu matemātisko pierakstu, līdzīgi kā ar laiku t, aplūkojamam fragmentam kalna sākuma augstums h_0 tiek pieņemts par nulli un beigu augstums par h. Vienādojums (8), papildināts ar potenciālās enerģijas izmaiņu, izskatās šādi:

$$Pt + Mgh = \frac{M\left(v^2 - v_0^2\right)}{2} + \frac{I\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}{2}. \tag{12}$$

Analogi $h = 0$ gadījumam var nonākt pie $v^2(t)$ izteiksmes:

$$v^2(t) = v_0^2 + 2\frac{Pt}{\alpha M} + 2\frac{gh}{\alpha}. \tag{13}$$

Domājot tālāk par $v_R(t)$ integrēšanu, lai iegūtu $S(t)$, veidojas matemātiska problēma. Kā aprakstīt augstuma h maiņu pēc laika t vienādojumā (13)? Kā zināms, kalns ir reāls dabas veidojums, kura augstumu viennozīmīgi nosaka trases vieta, tātad $h = h(S)$. Aproksimējot ar taisni, sanāktu $h(t) = h \cdot S(t) / S(t_B)$, kur t_B ir apskatītā laika intervāla beigas. Problēma ir tāda, ka $S(t)$ nedrīkst parādīties $h(t)$ izteiksmē, jo pats $S(t)$ tiks meklēts ar integrāli (kā vien. (11)). Izveidosies integrālvienādojums, kas neļaus iegūt atrisinājumu pārskatāmas matemātiskas formulas veidā. Tāpēc $h(t)$ ir jāapraksta kaut kādā citādā veidā.

Augstākās grūtības pakāpes fizikas uzdevumos tiek pielietots paņēmiens integrēt izteiksmes pēc tādiem parametriem, pēc kuriem tas ir matemātiski iespējams, bet nevis pēc tiem, kurus pieprasa Daba. Tāpēc es augstumu $h(t)$ tieši piesaistu laikam t:

$$h(t) = k_h t \,, \tag{14}$$

kur k_h ir kalna stāvuma koeficients. Šeit jāiegaumē, ka k_h nesakritīs ar ceļu apzīmējumos pieņemtajiem kalna stāvuma procentiem, jo tie, kā pieklājas, ir piesaistīti reālajam reljefa stāvumam $h(S)$, nevis braukšanas ātrumam, un no tā – laikam t.

Lietojot $h(t)$ aprakstu vien. (14) formā, reālā kalna forma $h(S)$ nevienmērīga braukšanas ātruma gadījumā nesanāk ideāli taisna līnija. Straujāka braukšanas ātruma izmaiņa rada lielāku augstuma h izmaiņu par taisni, pārrēķinot uz $h(S)$ interpretāciju. Par laimi, šī stāvuma atšķirība nav tik liela, lai teiktu, ka tādu reljefa kalnu mūsu trasēs nav. Kas attiecas uz šo atkāpi no taisnes, es pat varu viltprātīgi uzskatīt, ka trasē sastopamie kalni vairāk atbilst tādam reljefam nekā taisnēm. Jebkurā gadījumā, galvenais arguments, kas pieļauj šādu aproksimāciju, ir tāds, ka uzdevumā tiek rēķināta divu braucēju starpība, kas brauc pa vienu un to pašu trasi, tātad *vienādiem* kalniem. Vienādo kalnu nosacījums gan tiks izpildīts par „papildus cenu" – koeficients k_h ir jāpiedzen katram braucējam savs (par to raksta turpinājumā).

Pēc analoģijas ar vien. (10), reālā ātruma vienādojums iznāk šāds:

$$v_R(t) = k_2 v^2 + k_1 v = k_2 \left(v_0^2 + 2\frac{P + gMk_h}{\alpha M} t \right) + k_1 \sqrt{v_0^2 + 2\frac{P + gMk_h}{\alpha M} t} \,, \tag{15}$$

kas, pateicoties vien. (14) formai, integrējas tāpat kā horizontālā posma gadījums:

$$S(t) = \int_0^t v_R(t) dt = k_2 v_0^2 t + k_2 \frac{P + gMk_h}{\alpha M} t^2 + \frac{k_1}{3} \frac{\alpha M}{P + gMk_h} \left[\left(v_0^2 + 2\frac{P + gMk_h}{\alpha M} t \right)^{\frac{3}{2}} - v_0^3 \right]. \tag{16}$$

Kā redzams, vienīgā atšķirība starp vien. (10) un (15), kā arī starp vien. (11) un (16) ir saskaitāmais gMh_k pie P. Vienādojumi (15) un (16) ir lietojami jebkura reljefa gadījumam: lejā no kalna $k_h > 0$, kalnā $k_h < 0$, horizontālā posmā $k_h = 0$.

Uz skatuves parādās raksta varoņi Entrijs un Vīnijs

Labā romānā galvenajiem varoņiem nav jāparādās no paša romāna sākuma... šajā rakstā tas notiek tikai tagad.

Ērtības labad dosim viņiem skanīgus vārdus. Pirmo sauksim par Entriju (no vārda *entry*) – tātad ienācējs jeb iesācējs MTB sacensībās. Entrijs ir pircis savu sacensību divriteni ar prasībām „bez sadārdzinājuma kaut ko tādu, ar ko var braukt mačos!”. Jādomā, ka godprātīgs pārdevējs būs izvēlējies Entrijam vidēji vieglu alumīnija rāmi (1,8 – 2,0 kg), attiecīgas kategorijas amortizatora dakšu (Riekstukalnā ar cietajām dakšām brauc izteikts mazākums, bez tam Entrija konkurentam noteikti būs dārga amortizatora dakša) un pārējo aprīkojumu ap Shimano LX grupu. Tāda divriteņa svars ar atbilstošas klases ratiem un riepām ir 12 – 12,5 kg.

Otro sauksim par Vīniju. Jādomā, ka komentāri viņa vārda izvēlē ir lieki, bet tomēr – *Weight Weenie*, tātad sava uzticamā drauga svara zinātājs un skurpulozs cīnītājs par tā samazināšanu. Par cik šī raksta mērķis ir noskaidrot spēku samēru Latvijas tehniski sarežģītākajā trasē, pareizāk būtu ņemt mūsu Vīniju tieši no turienes – nevis skatīties pasaules rekordu virzienā. Ko tad mēs dzimtenes ārēs redzam? No dažādiem informācijas avotiem pēdējo gadu laikā es esmu uzzinājis, ka Trek 9,45 kg, KTM 9,4 kg, KTM tjūnēts 9,35 kg, Scott Scale Limited 9,25 kg... ar to pietiek, lai mūsdienīgam Latvijas sacīkšu Vīnijam pierakstītu 9,3 kg, un uzskatītu, ka atkāpe no realitātes būs maza.

Tālāk jāpieņem pārējie nepieciešamie raksturlielumi. Vīnija divriteņa masa ir jau konkretizēta. Entrija divriteņa masu (no diapazona 12 – 12,5 kg) es ņemu par apaļiem 3 kg lielāku kā Vīnijam: 12,3 kg. Attiecībā uz braucējiem, uzskatīsim, ka viņi intensīvos treniņos ir nodzinuši sev visu lieko svaru: 70,7 kg. Tātad Entrija pilnā masa ir 83 kg, Vīnija 80 kg.

Beidzamais šīs raksta daļas darbiņš ir sarēķināt Entrija un Vīnija riteņu inerces momentu I, kas nepieciešams parametra α aprēķināšanai. Lai uzskatāmāk parādītu aprēķinu, es to veicu tabulas formā.

				Entrijs		Vīnijs	
detaļas	rotējošā ķermeņa veids	I aprēķina formula	rotācijas rādiuss (m)	detaļas masa (g)	I ($kg{\cdot}m^2$)	detaļas masa (g)	I ($kg{\cdot}m^2$)
riepa + kamera	plāns gredzens	$m{\cdot}r^2$	0,305	700+200	0,0837	*Kenda Climax Lite + Schwalbe Light* 345+105	0,0419
aploks	plāns gredzens	$m{\cdot}r^2$	0,280	550	0,0431	*Mavic CrossMax* 395	0,0310
32 spieķi	radiāls stienis	$\frac{1}{3}m{\cdot}r^2$	0,280	$32 \cdot 6{,}5$	0,0054	*Sapim CX-Ray* $32 \cdot 3{,}9$	0,0033
abu riteņu summa					**≈0,265**		**≈0,152**

Tabula 1. Inerces momenta I aprēķins Entrija un Vīnija riteņiem.
(Entrija riteņu detaļas nav konkretizētas, jo aplūkotajā svara kategorijā tās piedāvā daudzi ražotāji.)

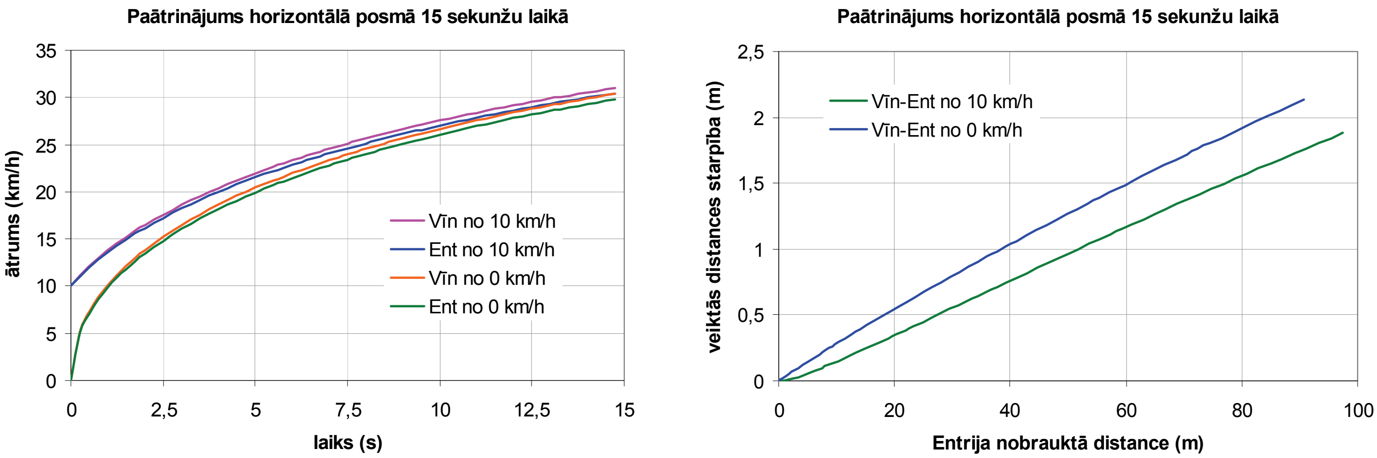
... un šovs var sākties!

Pirms pievērsties Riekstukalna trases datiem, der izmantot uzdevuma risinājuma fizikālās metodes priekšrocības – proti, pārvērst matemātiskā modeļa vienādojumus grafikos. Tas tiek darīts, lai lasītājs iegūtu skaidrāku priekšstatu par pētāmo uzdevumu.

Šajā raksta daļā es grafiski analizēju izdalītus trases fragmentus, kurus atšķirīgas masas braucēji veic nevienādi ātri: paātrinājumu horizontālā posmā, braukšanu kalnā, braukšanu no kalna. Bremzēšanu es atstāju bez ievērības, jo pieņemu, ka tā Entrijam nesagādā ievērojami lielākas grūtības kā Vīnijam (tik vien kā mazliet ātrāk nodilst bremžu kluči).

a) paātrinājums horizontālā trases posmā

Grafiks 3 ir izveidots pēc vien. (15), ievietojot tajā iepriekš izvēlētus Entrija un Vīnija raksturlielumus. Jauda P (t.i., vilcējjauda, atskaitot nost rites berzi, tāpēc šeit un arī turpmāk rakstā Entrijam papildus -4W) ir izvēlēts saprātīgs lielums 300 W, kādu braucējs sacensību laikā attīsta straujos paātrinājumos.



Graf. 3a, 3b. Entrija un Vīnija paātrinājums horizontālā trases posmā 15 sekunžu laikā no sākuma ātruma 0 un 10 km/h. Paātrinājuma vilcējjauda P=300 W.

No nulles atšķirīga sākuma ātruma lietošana prasa matemātisku uzmanību. Šis sākuma ātrums neapšaubāmi ir jāsaprot kā ātrums, ko rāda velodators – tātad reālais ātrums. Taču vien. (9) prasa lietot idealizēto sākuma ātrumu v_0. Tāpēc no vien. (7) ir jāizrēķina kvadrātvienādojuma sakne, lai no reālā sākuma ātruma v_{R0} tiktu pie idealizētā:

$$v_0 = \frac{-k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_2 v_{R0}}}{2k_2}. \tag{17}$$

Par graf. 3a gribētos teikt, ka uz kopējās veiktās distances ≈100 m fona nekādi brīnumi nenotiek. Ātrumu starpība starp Entriju un Vīniju attīstās ļoti lēni, un distances beigās sasniedz visai niecīgu vērtību. Tomēr ar to pietiek, lai graf. 3b rādītu *taustāmu ainu*. Šajā grafikā tiek parādīta veiktā ceļa starpība starp Vīniju un Entriju – tātad, cik metrus, atkarībā no savas atrašanās vietas, Entrijs redzēs Vīniju sev priekšā. Un pēc atskaitītajām 15 s, paātrinoties no 10 km/h, tie sanāk 1,88 m, no 0 km/h – 2,14 m. Tātad vesels basketbolista augums!

Kā redzams, sākuma ātrums 10 km/h paātrinājumā horizontālā posmā dod visai mazu ieguldījumu. Tomēr var konstatēt, ka Entrijam, gluži kā piekrautai kravas mašīnai, ir neizdevīgāk sākt sacenšanos no nulles ātruma.

b) braukšana kalnā

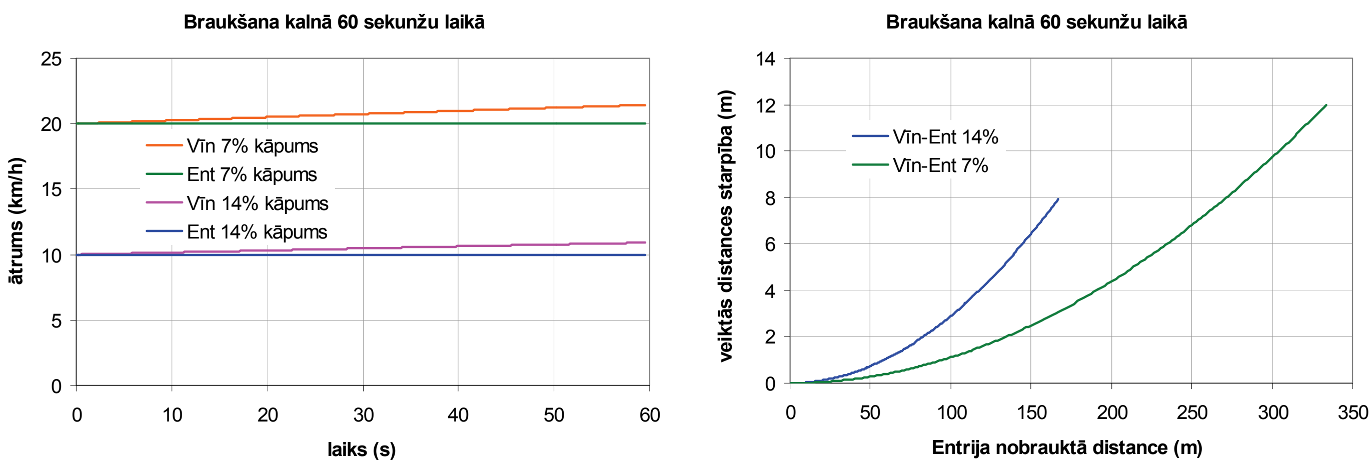
Apskatot braukšanu kalnā, interesanti ir salīdzināt Entrija un Vīnija pūliņus divu dažādu stāvumu kāpumos. Atšķirībā no paātrinājuma horizontālā trases posmā, braukšana kalnā tiek apskatīta 60 s laikā. Par stāvāko saprātīgi ir izvēlēties piem. 14% kāpumu (1,4 m kāpums uz 10 m garu ceļa posmu).

Otru kāpumu es ņemu tieši divas reizes lēzenāku – 7%. Vilcējjauda tiek izvēlēta, lai Entrija braukšanas ātrums visu 60 s laikā saglabātos konstants. Šāds izvēles princips labi atbilst realitātei, kad braucējs jau kalna sākuma daļā izvēlas konstantu ātrumu, ar kādu ieiet ritmā, lai forsētu kalnu līdz augšai. Ņemot braukšanas ātrumu stāvākajā kalnā 10 km/h, Entrija vilcējjaudas vērtība tādējādi sanāk 316 W. Viegli saprast, ka tikpat liela vilcējjauda ļauj braukt augšā divas reizes lēzenākā kalnā ar divas reizes lielāku ātrumu – tātad 20 km/h.

Izvēloties braukšanai kalnā konstantu ātrumu, kalna forma saskaņā ar vien (14) iznāk ideāli taisna līnija. Taču, par cik Entrija un Vīnija braukšanas ātrumi mazliet atšķiras, Entrijam kalna stāvuma koeficients, kas ir saistīts ar laiku, ir mazliet mazāks. Matemātiski to var aprakstīt šādi:

$$\begin{cases} \text{Vīnijam} \ : h(t) = k_h t \\ \text{Entrijam} \ : h(t) = (1-\gamma) k_h t \end{cases} \qquad (14^*)$$

kur γ ir mazs koriģējošais lielums (0,01... 0,025).



Graf. 4a, 4b. Entrija un Vīnija braukšana kalnā 60 sekunžu laikā. Entrija vilcējjauda ir pieņemta 316 W, lai, braucot 14% un 7% stāvā kalnā, tiktu uzturēts vienmērīgs braukšanas ātrums: attiecīgi 10 km/h un 20 km/h.

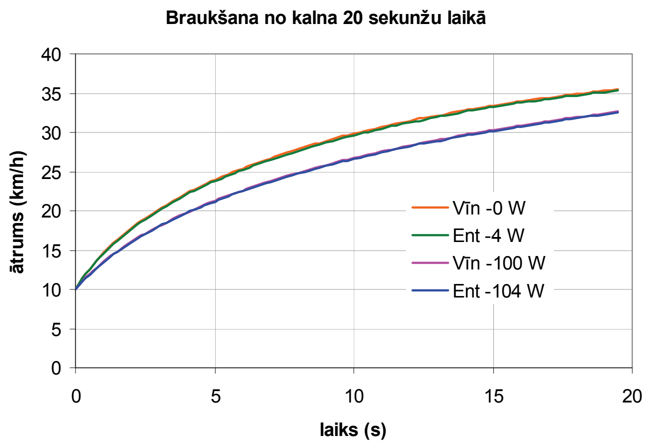
Braukšana kalnā ir ilustrēta graf. 4a, 4b. Grafiks 4a uzskatāmi rāda, ka apstākļos, kuros Entrija ātrums ir konstants, Vīnijam izdodas to pakāpeniski palielināt. Tas notiek ne tikai tāpēc, ka Vīnijs nes augšā kalnā par 3 kg mazāk, bet arī tāpēc, ka Vīnijam šai darbībai ir „atvēlēta" par 4 W lielāka vilcējjauda (320 W). Tieši otrā iemesla dēļ ātrumu starpība neattīstās tieši proporcionāli sākuma ātrumiem (graf. 4a): divas reizes lielāka sākuma ātruma gadījumā tā attīstās tikai pusotras reizes lielāka. Tomēr visas četras ātruma līnijas $v = v(t)$ ir taisnes, kas nozīmē, ka veiktā distance (vai tās starpība) būs parabolas līkne – kā to parāda graf. 4b. Braucot 14% kāpumā, Vīnijs 60 s laikā 165 m garā ceļā ievinnē gandrīz pilnus 8 metrus! Divas reizes lēzenākā kāpumā pēc tiem pašiem 165 m Vīnijs ir ievinnējis 3,1 metru – tātad divarpus reizes mazāk. Zīmīgi ir secināt no graf. 4b, ka kopsummā 60 s laikā divas reizes lēzenākā kāpumā, pateicoties divas reizes lielākam braukšanas ātrumam, Vīnijs aizsteidzas priekšā vairāk nekā stāvākā kāpumā. Lēzenākā kāpumā Vīnija pārsvars 8 m tiek sasniegts 50. sekundē. Pēc 60 s Vīnija pārsvars ir sasniedzis veselus 12 m – tiesa gan, divas reizes garākā kalna gabalā (330 m).

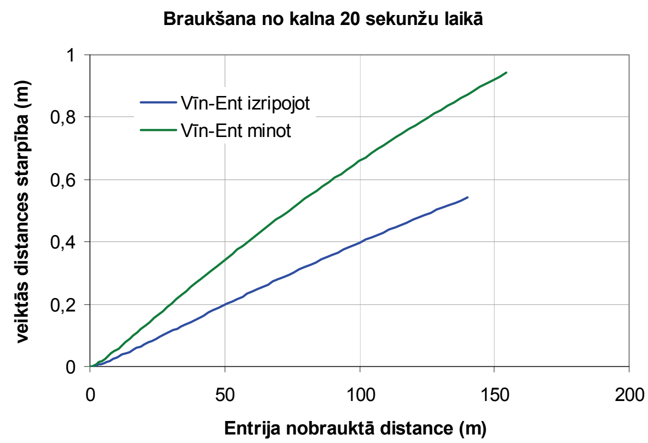
c) braukšana no kalna

Apskatot braukšanu no kalna, svarīgi ir saprast, ka pielikta papildus vilcējjauda matemātiski precīzi kompensē mazāku kalna stāvumu. Citiem vārdiem sakot, brīva noripināšanās no 10% kalna dos tieši tādu pašu ātruma un nobrauktā ceļa raksturlīkni kā braukšana no 5% kalna, *pieminot klāt* trūkstošo jaudu – ko pirmajā gadījumā dod lielāks potenciālās enerģijas kritums. Tāpēc visiem aplūkojamiem gadījumiem var ņemt tikai vienu noteiktu kalna kritumu, piem. 5%, variējot ar vilcējjaudu. Attiecībā uz pēdējo, interesanti ir iekļaut gadījumu, kad notiek noripināšanās no kalna, t.i., neminot. Šādā gadījumā matemātiskajā modelī ir jāievada negatīvas (!) vilcējjaudas, kas atbilst rites berzei: saskaņā ar iepriekš izvēlēto -104 W Entrijam un -100 W Vīnijam.

Par otru gadījumu saprātīgi ir izvēlēties tādu vilcējjaudu, kas precīzi kompensē Vīnija rites berzi: tātad attiecīgi -4 W un 0 W. Šāda „piezemēta" braukšana un 20 s laiks ir izvēlēts arī tāpēc, lai ātrums kalna pakājē nepārsniegtu Latvijas velokrosos reāli sasniedzamās vērtības (35... 40 km/h).

Kā redzams no graf. 5a, Vīnijs 20 s laikā iegūst tikko saredzamu ātruma pārsvaru (0,1... 0,15 km/h). Par cik nobrauciena laiks ir īss un sasniegtais ātrums visai liels, arī graf. 5b uzrāda niecīgu Vīnija pārsvaru – jebkurā gadījumā nepilns metrs uz 150 m distances (izripojot 0,94 m uz 155 m, minot 0,54 m uz 140 m). Izripojot Vīnijs savu pārsvaru iegūst tikai uz papildus 4 W un mazākas riteņu inerces momenta vērtības rēķina. Minot abi braucēji piešķir divriteņiem papildus paātrinājumu – un, kā tas tika konstatēts nodaļā „a)", ar šo darbību Vīnijs iegūst papildus pārsvaru. Citiem vārdiem to varētu pateikt tā – jo smagāks divritenis, jo grūtāk ir izmainīt tā „dabisko" lejā ripošanas ātrumu.





Graf. 5a, 5b. Entrija un Vīnija braukšana no kalna 20 sekunžu laikā. Izvēlētajā kritumā 5% tiek aplūkota braukšana izripojot un braukšana ar tādas jaudas mīšanu, kas kompensē Vīnija rites berzi (100 W).

d) šķēršļa pārvarēšana: Entrijs reabilitējas!

Visos līdz šim apskatītajos gadījumos: paātrinājumā horizontālā ceļa posmā, braukšanā kalnā un lejā no kalna Vīnijs ir izrādījies ātrāks par Entriju. Šķiet neloģiski, ka Entrija masas pārsvars nevienā epizodē nepārvēršas nobrauktās distances pārsvarā – vēl jo vairāk, ja šīs epizodes tiek apskatītas ar sākuma ātrumu. Katrs praktiskas dabas cilvēks taču zin, ka pretestības pārvarēšanā iekustināts smagāks priekšmets ir efektīvāks par viegli. Piemēram, nolocīt naglu ar smagu āmuru var ar vienu sitienu, bet ar vieglu āmuru tā jādauza vairākas reizes.

Šie spriedumi ir pareizi, un, attaisnojot uz tiem liktās cerības, šajā raksta nodaļā tiek apskatīts gadījums, kurā Entrijs pārspēj Vīniju.

Uzdevuma risinājumā ir iekļauti divi galvenie pretestības spēki: rites berze un gaisa pretestība. Kāpēc šo pretestības spēku pārvarēšana nedeva priekšrocību Entrijam, ja Entrijs ir par veseliem 3 kg smagāks par Vīniju? Gaisa pretestības spēku Entrijs *patiešām* pārvar ar mazāku ātruma zudumu nekā Vīnijs – uzmanīgi ieskatoties, tas redzams grafikā 2. Tikai nelaime tāda, ka līdz ātrumam $v_R \approx 30$ km/h šī atšķirība ir izveidojusies ļoti maza. Intervālā 30... 35 km/h atšķirība ir jau pamanāma, tomēr vēl pārāk maza, lai aprēķina kļūdas robežās aproksimācijai vajadzētu izvēlēties atšķirīgus koeficientus (vien. (7)). Ātrumiem $v_R > 35$ km/h Entrijam un Vīnijam vajadzētu lietot atšķirīgus koeficientus, bet tik lieliem ātrumiem šajā rakstā nekas netiek rēķināts. Savukārt rites berzes pārvarēšana Entrijam nāk par sliktu (rites berzes spēks proporcionāls masai), jo šajā gadījumā masa darbojas nevēlamā virzienā – ar savu spiedienu tā deformē riepas formu un ceļa segumu.

Līdz šim apslēptā patiesība ir sekojoša: jebkuru pretestības spēku, izņemot rites berzi, Entrijs pārvar ar mazāku ātruma zudumu. To var saprast ne tikai no prakses, bet arī no pietiekami vienkāršas matemātiskās izteiksmes. Pieņemsim, ka mūsu riteņbraucējiem ir jāpārvar kāds šķērslis, piem. jāpasit malā vai jāpārlauž kāds sprungulis. Tas prasa noteiktu darbu A. Šis darbs A tiešā veidā atņemas no braucēja kinētiskās enerģijas, samazinot tā ātrumu:

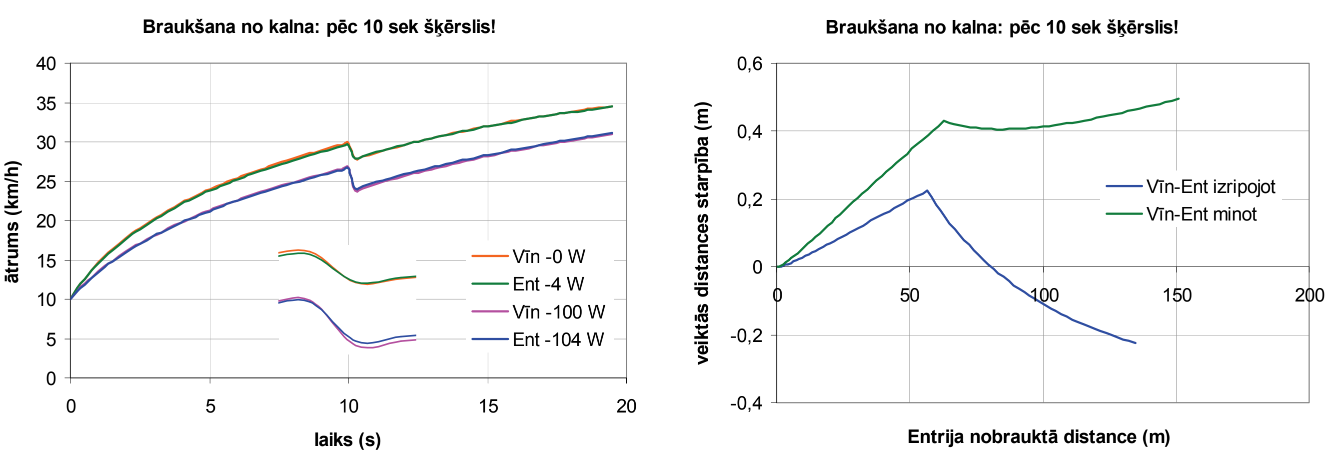
$$\frac{Mv_{pirms}^2}{2} - A = \frac{Mv_{pēc}^2}{2}\,. \tag{18}$$

Apsverot noteiktu braucēja ātrumu pirms šķēršļa v_{pirms}, no vien. (18) var viegli izsecināt – jo lielāka ir masa M, jo mazāks uz tā fona ir veicamais darbs A, tātad jo mazāk samazināsies ātrums.

Es matemātiski analizēju šķēršļa pārvarēšanu, braucot lejā no kalna ar iepriekšējās nodaļas „c)" nosacījumiem. Ietvertot vien. (18) matemātiskajā modelī, kas apraksta zīmētos grafikus, es pieņemu, ka šķērslis ir pēc laika $t^* = 10$ s. Idealizētā ātruma kvadrātu $v^2(t)$ pēc šķēršļa $(t > t^*)$ var aprakstīt ar sekojošu formulu:

$$v^2(t) = v_0^2 - \Delta v^2 + 2\frac{P + gMk_h}{\alpha M}t\,, \tag{19}$$

kur $\Delta v = v_{pirms} - v_{pēc}$ ir ātruma zudums, pārvarot šķērsli. Entrijam saskaņā ar vien. (18) tas iznāks mazāks nekā Vīnijam. Reālā ātruma samazinājumu šķēršļa pārvarēšanas gadījumā rāda graf. 6a.



Graf. 6a, 6b. Braukšana no kalna, pēc 10 sekundēm pārvarot šķērsli. Grafikā 6a palielinātajā fragmentā redzams, ka Vīnija ātrums nokrīt zem Entrija ātruma. Grafiks 6b parāda, ka izripošanas gadījumā Entrijs apsteidz Vīniju, pēc 20 sekundēm iegūstot tādu pašu pārsvaru, kā Vīnijs tieši pirms šķēršļa.

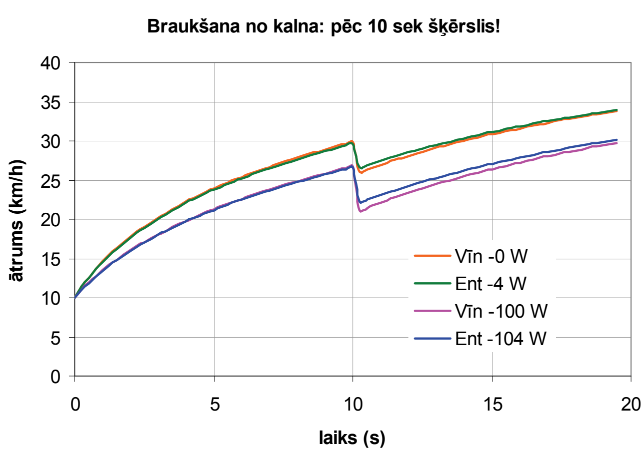
Lai atrastu nobraukto ceļu pēc šķēršļa pārvarēšanas, vien. (17) ir jāintegrē no laika t^* līdz nenoteiktam laikam t:

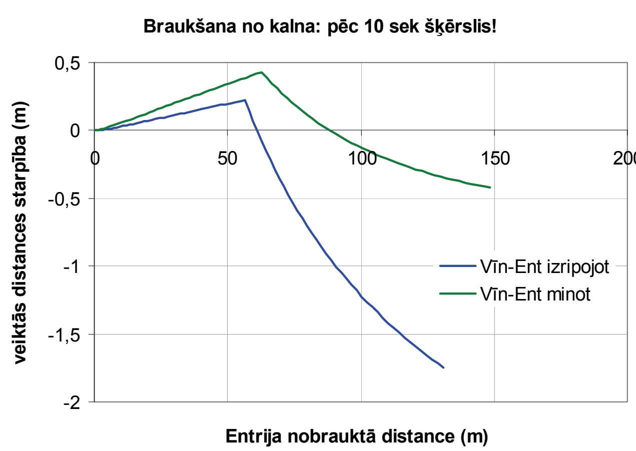
$$S(t) = S^* + \int_{t^*}^{t} v_R(t)dt = k_2(v_0^2 - \Delta v^2)(t - t^*) + k_2 \frac{P + gMk_h}{\alpha M}(t^2 - t^{*2}) +$$
$$+ \frac{k_1}{3} \frac{\alpha M}{P + gMk_h} \left[\left(v_0^2 - \Delta v^2 + 2\frac{P + gMk_h}{\alpha M} t \right)^{\frac{3}{2}} - \left(v_0^2 - \Delta v^2 + 2\frac{P + gMk_h}{\alpha M} t^* \right)^{\frac{3}{2}} \right], \qquad (20)$$

kur S^* ir nobrauktais ceļš līdz šķērslim, kuru atrod pēc vien. (16) ievietojot $t = t^*$.

Grafiks 6b parāda, ka šķēršļa pārvarēšanas gadījumā Entrijs reabilitējas par visiem iepriekš paciestajiem zaudējumiem: līknes noslīdēšana zem nulles nozīmē, ka Entrijs apsteidz Vīniju! Graf. 6a, 6b ātruma zudums Δv ir izvēlēts tāds, lai apskatīto 20 s beigās izripošanas gadījumā Entrijs būtu aizsteidzies priekšā Vīnijam tieši tik, cik Vīnijs Entrijam pirms šķēršļa: 0,22 m. Šis ātruma zudums (to aptuveni var nolasīt no graf. 6a) sanāk 2,5 km/h Entrijam un 2,9 km/h Vīnijam – tātad diezgan jūtams sitiens.

Visbeidzot grafiki 7a, 7b ataino situāciju, kurā Entrijs iegūst Vīnija *pirmsšķēršļa pārsvaru* mīšanas gadījumā. Tas notiek pie ātruma zuduma 3,0 km/h Entrijam un 3,8 km/h Vīnijam. Grafiks 7b bez atvinnētā Vīnija pārsvara 0,43 m mīšanas gadījumā uzrāda ievērojamu Entrija pārsvaru izripošanas gadījumā: 1,75 m!





Graf. 7a,7b. Braukšana no kalna, pēc 10 sekundēm pārvarot šķērsli. Šķēršļa lielums izvēlēts, lai Entrijs pēc 20 sekundēm iegūtu Vīnija pirmsšķēršļa pārsvaru mīšanas gadījumā.

Par *downhill* sporta divriteņu svaru

Jādomā, ka gandrīz visi šī raksta lasītāji zin, ka *downhill* (DH) ir kalnu riteņbraukšanas nobrauciena disciplīna. DH divriteņi atšķiras no saviem XC/MTB brāļiem ar to, ka ir pusotras līdz divas reizes smagāki.

Lielāka masa DH divriteņiem neglābjami veidojas no krietni augstākām prasībām pret detaļu izturību. DH riepas un aploki ir apmēram divas reizes smagāki par XC/MTB. Taču interesantākais ir fakts, ka DH, attīstoties detaļu materiāliem un ražošanas tehnoloģijām, nebūt nav pārliecināti tendēti uz svara samazināšanu.

Atliek secināt, ka DH divriteņu būvē tiek uzskatīts, ka viegls braucamais nebūs labāks par smagu. Grafiki 6b, 7b, 8b vedina apstiprināt šādu secinājumu. Īstas DH trases ir pietiekami stāvas un tehniski sarežģītas, tāpēc braukšanas ātrums ar mīšanu tiek palielināts visai maz (vai nemaz). No graf. 6b redzams, ka absolūtā bezšķēršļu trasē par 3 kg vieglāks ritenis uz 150 m spēj ievinnēt mazāk kā vienu metru. Parādoties uz trases kaut kādiem šķēršļiem – piem. zemes pikām vai koka sprungulīšiem, vieglāka divriteņa ātruma pārsvars sāk sarukt un > 2 km/h ātruma zuduma gadījumā drīz vien noslīd zem nulles (graf. 7b, 8b). Vienkārši sakot, pietiekami piedrazotā nobraucienā smagāks divritenis izrādīsies ātrāks par vieglāku. Bez šī konstatējuma pastāv vēl viens ne mazāk svarīgs efekts – smagāks divritenis ir daudz stabilāks! Bez lielākas stabilitātes translācijas kustībā, smagiem riteņiem daudz jūtamāk izpaužas žiroskopiskais efekts, kas neļauj tik viegli mainīt rotējoša riteņa plakni (pasist šķērsām stūri).

Šo teorētiski pierādīto un praksē jūtamo iemeslu dēļ DH entuziasti necīnās par savu tērauda kumeļu masas samazināšanu. Turpretim MTB lauciņa kopējiem, kuru braukšanas elementi ir arī strauji paātrinājumi un braukšana augšā kalnā, tas ir ļoti svarīgs jautājums.

Entrijs un Vīnijs Riekstukalna XC trasē

Šī raksta daļa sniedz atbildi uz jautājumu, kas bija noformulēts kā risināmais uzdevums raksta sākumā – proti, cik sekundes Vīnijs ievinnē Entrijam Riekstukalna XC trasē. Lai to varētu izrēķināt, manā rīcībā ir 2007. gada 22. aprīļa sacensību dati (tad trase gāja pretēji plkst. rādītāju kustības virzienam, bet Milzu Lempju bedre vēl nebija iekļauta).

Šos datus ir reģistrējis pulsometrs ar altimetru, un tie satur aprēķiniem nepieciešamās kolonas: laiku, nobraukto distanci, augstumu un momentāno ātrumu. Risināšanas algoritms, kas balstās uz izveidotā matemātiskā modeļa izmantošanu, ir sekojošs:

1. Vispirms ir jāpieņem, vai esošos datus attiecināt uz Vīniju vai uz Entriju (par cik starpība ir daudz mazāka par datu absolūto vērtību, tas ir vienalga). Respektējot datu īpašnieka pašcieņu, es pieņemu, ka tie ir Vīnija dati.
2. No esošajiem datiem ir jāizdala visi tie fragmenti, kuros ātrums vai augstums nesaglabājas konstants. Tādi fragmenti ir *gandrīz visi*, un kopsummā pa apli to sanāk ļoti daudz. Tāpēc pēc parametru izmaiņām līdzīgus blakusstāvošos fragmentus vajag apvienot vienā, ņemot visas fragmentu grupas sākuma un beigu vērtības. Tas samazina aprēķina precizitāti, bet kas daudz svarīgāk - samazina veicamā darba apjomu līdz saprātīgam. Es paliku pie 75 fragmentiem aplī.
3. Tiek uzskatīts, ka uz trases nav šķēršļu, kas tiešā veidā neattiecas uz rites berzi – jo, ja tādi ir, to ir pietiekami maz, bez tam no datiem nav iespējams apzināt šo šķēršļu atrašanās vietas un A vērtības. Šis pieņēmums garantē uzvaru Vīnijam (!).
4. No katra trases fragmenta tiek ņemts tā sākuma, beigu ātrums un veikšanas laiks v_{R0}, $v_R(t)$, t, bez tam no fragmentā veiktās distances un altimetra rādījumiem tiek atrasts tā kāpums vai kritums.
5. Pēc. vien (17) tiek atrasti idealizētie ātrumi. Atrastie v_0, $v(t)$ un t kopā ar pārējiem Vīnija parametriem tiek ievietoti vien. (16) lai konstruētu kalna profilu $h = h(S)$ un atrastu tādu k_h vērtību, kas atbilst pulsometra reģistrētajam fragmenta kāpumam vai kritumam.
6. Kad iepriekšējais punkts ir veikts, no vien. (16) tiek uzzināta vilcējjauda P (ar atskaitītu rites berzi!), kādu braucējs ir attīstījis apskatītajā fragmentā. Šeit vietā ir piezīmēt, ka vienā trases fragmentā, kurā braucēji parasti izripo, šī jaudas vērtība man sanāk ļoti tuvu pieņemtajai rites berzes vērtībai -100 W. Tas apliecina izmantotā matemātiskā modeļa pareizību šajā aspektā.
7. Sākas aprēķina atpakaļceļš. No atrastās Vīnijas vilcējjaudas tiek atņemti 4 W (Entrija rites berzes „papildus nodeva"). Par apskatāmā fragmenta Entrija sākuma ātrumu vajag ņemt iepriekšējā fragmenta izrēķināto Entrija beigu ātrumu. Šāds matemātisks process ir sarežģīts un nedrošs, jo sistemātiskas neprecizitātes gadījumā visu 75 fragmentu laikā aprēķina kopējā kļūda aug uz iepriekšējā fragmenta kļūdas rēķina. Par laimi, katra fragmenta sākuma ātrumu atšķirību starp Vīniju un Entriju var pakontrolēt, vai tā nav *aizpeldējusi* neadekvāti trases apstākļiem.
8. Ievietojot vien. (16) attiecīgā fragmenta Entrija sākuma ātrumu, fragmenta garumu un stāvumu, kā arī pārējos Entrija parametrus, ar iterācijas metodi tiek piemeklēta parametra γ vērtība, lai kalna profili Vīnijam un Entrijam sakristu (vien. (14*)).
9. Kad γ ir atrasts, no vien. (16) tiek izrēķināts laiks t, kurā Entrijs veic minēto fragmentu. Atņemot no šī laika t nolasīto laiku no pulsometra (t.i., attiecīgā fragmenta veikšanas Vīnija t), tiek iegūts, cik daudz laika attiecīgajā fragmentā Vīnijs ir ievinnējis Entrijam.

10. Sasummējot visus iegūtos laika fragmentus kopā, galu galā tiek aprēķināts, cik sekundes Vīnijs ievinnē Entrijam vienā pilnā Riekstukalna XC trases aplī!

Visa šī procedūra fizikāli ir diezgan viegli saprotama, bet matemātiski ļoti piņķerīga. Viena Riekstukalna XC trases apļa aprēķināšana man bija laikietilpīgs darbs...

Skaitliskais rezultāts man iznāca **50 sekundes 4,72 km garā aplī**.

Cik šis rezultāts ir ticams, un kāda tam varētu būt kļūda? Faktiski nav iespējams izrēķināt kļūdu tāda tipa uzdevumam, kas veido saikni starp eksperimentu un matemātiskām aproksimācijām. Tāpēc galvenokārt profesionālā pieredze līdzīgas sarežģītības uzdevumu risināšanā ļauj uzskatīt, ka, attiecībā pret matemātisko modeli, šāds izrisinājums ir 15... 20% kļūdas robežās. Vēl nepieciešams novērtēt, kādi svarīgākie faktori netika iekļauti matemātiskajā modelī, un kādā virzienā tie darbojas. Trases kalnu profila aproksimācija ar vien. (14*) un izdalītais trases fragmentu skaits nepalielina šī aprēķina kļūdu virs 20%. Paliek divi fizikāli faktori. Pirmkārt, tiek uzskatīts, ka visā trasē nav tādu šķēršļu, kas tiešā mērā neattiektos uz rites berzi (vien. (18)). Otrkārt, tehniski sarežģītās trases vietās prasmīgs braucējs mēdz pavingrot – t.i., vajadzīgā vietā un brīdī pamainīt sava ķermeņa smaguma centra atrašanās vietu attiecībā pret divriteni. Pirmais vērā neņemtais faktors būtu par labu Entrijam, otrais Vīnijam. Par cik tie darbojas pretējos virzienos (!), pamatoti ir pieņemt, ka rezultāta kopējā kļūda nepārsniedz 25%.

Masas atšķirība starp Entriju un Vīniju ir tik maza, ka kļūdas robežās iegūtās 50 s droši var linearizēt. Tas nozīmē, ja kāda braucēja ķermeņa masa daudz neatšķiras no 71 kg un divriteņa masa no 9... 13 kg, viņam no Vīnija Riekstukalna XC trases vienā aplī vajadzētu atpalikt:

$$t'(s) = 50\frac{M'-80}{83-80} = \frac{50}{3}(M'-80), \tag{21}$$

kur *M'* (kg) ir braucēja pilnā masa.

Protams, vārdu „atpalikt” nevajag uztvert sāpīgi. Mums katram ir atļauts braukt ar MTB sporta divriteni, kas nav smagāks kā šī raksta Vīnijam. Bez tam, ja tehniskās iespējas liekas izsmeltas, mums ir atļauts braukt spēcīgāk un tehniskāk par Vīniju un Entriju.

Vīnijs atbrīvojas no 50 gramiem

Raksta nobeiguma daļā es parādu, kā var izmantot vien. (21), lai novērtētu, cik daudz apskatītajā Riekstukalna XC trases aplī tiks ievinnēts, padarot divriteni vieglāku par noteiktu svaru.

Kā zināms, sava divriteņa atbrīvošana no „liekajiem” gramiem ir tipisku Vīniju mīļākā nodarbe. Šajā procesā apm. 50 grami tiek uzskatīti par sava veida robežvērtību, atbrīvojoties no kuriem, ne tikai gavilē Vīnija sirds, bet būtu kaut nelielā mērā arī jāpiepildās cerībām uz reālu rezultāta uzlabojumu.

Aplūkojot atbrīvošanos no gramiem, ir atšķirība, vai tie tiek atņemti no rotējošām vai nerotējošām detaļām. Šai sakarā jāatgriežas pie parametra α, kas Vīnijam pieņem vērtību (skat. arī tabulu 1):

$$\alpha = 1 + 4\pi^2 \frac{I}{Ms^2} = 1 + 0{,}018\,. \qquad (22)$$

Šajā skaitliskajā izteiksmē vieninieks rāda masas translācijas kustības ieguldījumu enerģijā, bet otrs saskaitāmais 0,018 – rotācijas kustības ieguldījumu. Rotācijas kustības loma nepilnu 2% apmērā var likties neticami maza, bet tāda tā tiešām ir*. Lai arī cik mazs būtu šis efekts, samazināt masu tikai nerotējošām detaļām vienmēr ir visneizdevīgāk. Tādā gadījumā efektīvo masas samazinājumu matemātiski pirmajā tuvinājumā iegūst, izdalot patieso masas samazinājumu ar α. Pieņemsim, ka Vīnijam ir izdevies atbrīvoties no 50 gramiem tikai nerotējošās detaļās:

$$\Delta M_{eff} = \Delta M/\alpha = 0{,}05/1{,}018 = 0{,}049 \text{ kg}. \qquad (23)$$

Kā redzams, pavisam minimāla korekcija. Pareizi ievietojot ΔM_{eff} vienādojumā (21), iegūst:

$$t'(s) = \frac{50}{3}(80 - \Delta M_{eff} - 80) = -\frac{50}{3}0{,}049 \approx -0{,}8 \text{ s}. \qquad (24)$$

Tātad astoņas sekundes desmitdaļas. Varbūt 4,72 km aplī tas kādam liekas pavisam maz... bet ja apļa finiša laukumiņš tiek pārvarēts ar ātrumu apm. 25 km/h, ceļa izteiksmē tas pārvēršas 5,5 metros!

Šo rakstu man gribētos nobeigt ar jautājumu uzticīgajiem lasītājiem: vai kaislīgs tehniski sarežģītu MTB trašu cīnītājs nožēlo izdoto naudu par reducētiem 50 gramiem, zinot, ka katrā Riekstukalna XC trases aplī tas viņam dod trīs cilvēku augumu pārsvaru?...

2009.g. aprīlis.

Raksta autors izsaka pateicību foruma www.xc.lv administratoram *Grey* par sagādātajiem pulsometra datiem.

* Uzskats, ka rotācijas ieguldījums kopējā enerģijā ir daudz lielāks, ir aplams. No graf. 1 redzams, ka ar vilcējjaudu 300 W ātrums 15 km/h tiek sasniegts apm. 3 s laikā. Vienu pašu riteni, aizāķējot pirkstu aiz spieķa, var iegriezt līdz 15 km/h ar rāvienu, kas ilgst dažas sekundas desmitdaļas (ja riteņa detaļas ir ļoti vieglas, kā tas ir Vīnijam). Bez šīs laiku attiecības nedrīkst aizmirst, ka pirksta rāviena jauda ir daudz mazāka par 300 W.

Saturs

Ievads	1
Visvairāk interesējošais jautājums	2
„Ķeršanās pie lietas” un nokļūšana matemātiskās grūtībās	2
Aplūkojamais uzdevums un tā risināšanas ideja	4
Pretestības spēku iekļaušana uzdevuma risinājumā	5
Uzdevuma matemātiskais modelis	7
a) horizontāls trases posms: $\Delta h = 0$	7
b) slīps trases posms: $\Delta h \neq 0$	8
Uz skatuves parādās raksta varoņi Entrijs un Vīnijs	10
... un šovs var sākties!	11
a) paātrinājums horizontālā trases posmā	11
b) braukšana kalnā	12
c) braukšana no kalna	14
d) šķēršļa pārvarēšana: Entrijs reabilitējas!	15
Par *downhill* sporta divriteņu svaru	18
Entrijs un Vīnijs Riekstukalna XC trasē	18
Vīnijs atbrīvojas no 50 gramiem	20